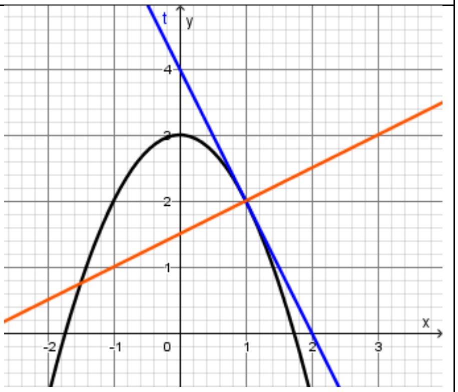
Tangente und Normale

Eine Tangente an eine Funktion berührt die Funktion in einem Punkt. Die Tangente hat dabei die gleiche Steigung wie die Funktion. Eine Normale berührt die Funktion ebenfalls in nur einem Punkt und steht dabei senkrecht (orthogonal) auf der Tangente.



Berechnung der Tangenten: Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ Wie lautet die Gleichung der Tangenten im Punkt P(1|2).

Lösung:

1. Da die Tangente die lineare Funktion beschrieben werden kann, stellen wie die allgemeine Gleichung einer linearen Funktion auf: $y = mx + b$
2. Erste Bedingung: Die Tangente hat die gleiche Steigung wie die Funktion im Punkt P. Daher berechnen wier die Steigung in diesem Punkt: $f`(x) = -2x$ und $f´(1) = -2 \rightarrow y = -2x + b$
3. Um b zu berechnen, setzen wir den Punkt P(1|2) ein: $2 = -2 \cdot 1 + b \rightarrow 2 = -2 + b \rightarrow b = 4$
4. Damit ergibt sich folgende Gleichung: $y = -2x + 4$

Allgemeine Tangentenformel. Geben sei allgemein die Funktion f(x) und der Punkt P(u |f(u))

Um die Steigung zu ermitteln leiten wir wieder die Funktion ab und setzen u ein: $f'(u)$ Dann setzen wir $f'(u)$, u und f(u) in die allgemeine Gleichung $y = mx + b$ ein. $f(u) = f'(u) \cdot u + b \rightarrow b = f(u) - f'(u) \cdot u$

Dies setzen wir wieder in $y = mx + b$ und fassen zusammen: $y = f'(u) \cdot x + f(u) - f'(u) \cdot u$

$y = f'(u) \cdot x - f'(u) \cdot u + f(u) \rightarrow y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Damit ergibt sich folgender Satz: Allgemeine Tangentengleichung

Sind die differenzierbare Funktion f und ein Punkt P(u |f(u)) mit u aus D_f gegeben, so lautet die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P: t: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Die Gleichung der Normalen findet man analog. Allerdings ist die Steigung nicht $f'(u)$, sondern $-\frac{1}{f`(u)}$, da die Normale ja senkrecht auf der Tangente steht. Damit lautet die Gleichung der Normalen:

n: $y = -\frac{1}{f`(u)} \cdot (x - u) + f(u)$. den Zusammenhang zwischen $= f'(u)$ und $-\frac{1}{f`(u)}$ sieht man am besten, wenn man die Steigung der beiden nebenstehenden mit Hilfe des Steigungsdreiecks bestimmt.